ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON
ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

×74×

SUJET OPTION P'

Concours d'Admission 1977
(Deux pages dactylographiées)

MATHEMATIQUES II

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté, de dimension 3, rapporté à la base orthonormée, directe, $b = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et $\mathcal{E}$ un espace affine associé. Σ_1, Σ_2, et S désignent trois surfaces sphériques mobiles dans $\mathcal{E}$. Σ_1 et Σ_2 sont centrées en O, point fixe de $\mathcal{E}$, et ont pour rayons respectifs R_1 et R_2, $R_2 > R_1$. S a pour centre M, pour diamètre $R_2 - R_1$, et elle demeure constamment en contact avec Σ_1 en M_1 et avec Σ_2 en M_2. Les mouvements de Σ_1 et de Σ_2 relativement à $\mathcal{E}$ sont définis par les vecteurs respectifs des rotations instantanées, $\vec{\Omega}_1$ et $\vec{\Omega}_2$, qui sont des applications données de classe C^k ($k \geq 1$) d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans E : $\vec{\Omega}_1 : t \longmapsto \vec{\Omega}_1(t)$, et $\vec{\Omega}_2 : t \longmapsto \vec{\Omega}_2(t)$. Dans le mouvement de S par rapport à $\mathcal{E}$, on désigne par $\vec{\omega}$ le vecteur de la rotation instantanée, et par $\vec{V}_M$ le vecteur vitesse du centre M de S, à l'instant t.

Les parties I et II sont indépendantes l'une de l'autre.

I) Le mouvement de S est soumis en permanence aux conditions de non-glissement aux points de contact avec Σ_1 et avec Σ_2, c'est à dire que les points de S et de Σ_1 (respectivement Σ_2) qui sont confondues en M_1 (respectivement M_2) à l'instant t ont, à cet instant, quel qu'il soit dans I, le même vecteur vitesse $\vec{V}_{M_1}(t)$ (respectivement $\vec{V}_{M_2}(t)$) dans les mouvements par rapport à $\mathcal{E}$.

1°) a) Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes de non glissement, liant entre elles, et avec les données $R_1, R_2, \vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2$, les fonctions vectorielles $\overrightarrow{OM}$, $\vec{\omega}$, $\vec{V}_M$.

b) En déduire l'expression de $\vec{V}_M$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et des données. Montrer que M participe au mouvement d'une sphère Σ centrée en O, et donner l'expression du vecteur $\vec{\Omega}$ de la rotation instantanée de ce mouvement de Σ par rapport à $\mathcal{E}$.

c) Déterminer de même le vecteur $\vec{\omega}$, en montrant qu'il s'exprime sous la forme : $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + f(t).\overrightarrow{OM}$, où $f : t \longmapsto f(t)$ est une application arbitraire, de classe C^k, $(k \geq 1)$ de I dans $\mathbb{R}$, et où $\vec{\omega}_1$ est à déterminer en fonction des données.

2°) Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour que les vecteurs $\vec{\omega}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ soient constamment : a) orthogonaux ; b) colinéaires.

3°) On considère le mouvement S/Σ_1 de S relativement à Σ_1. Le vecteur $\vec{\omega}_{S/\Sigma_1}$ de la rotation instantanée se décompose en deux vecteurs ; l'un est le vecteur du roulement, orthogonal à $\overrightarrow{MM_1}$, l'autre est le vecteur du pivotement, colinéaire à $\overrightarrow{MM_1}$.

a) Etablir une condition, liant $f(t)$, R_1, R_2, $\vec{\Omega}_1$, $\vec{\Omega}_2$ et $\overrightarrow{OM}$, nécessaire et suffisante pour que le roulement soit pur au contact M_1 de S avec Σ_1, c'est à dire pour que le vecteur du pivotement soit nul. Etablir la condition analogue pour le mouvement S/Σ_2 de S par rapport à Σ_2. Les roulements peuvent-ils être purs simultanément, dans les deux mouvements ?

.../...

×75×

b) Etablir une condition liant $\vec{\Omega}_1$, $\vec{\Omega}_2$ et $\overrightarrow{OM}$, nécessaire et suffisante pour que le pivotement soit pur au contact M_1 de S avec Σ_1, c'est à dire pour que le vecteur du roulement soit nul . Qu'en déduit-on pour le pivotement pur dans le mouvement S/Σ_2 ?

II) On rapporte maintenant $\mathcal{E}$ au repère $\tau = (O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et l'on pose :

$\vec{\Omega}_1 = p_1\vec{i} + q_1\vec{j} + r_1\vec{k}$, $\vec{\Omega}_2 = p_2\vec{i} + q_2\vec{j} + r_2\vec{k}$.

On considère les mouvements de S par rapport à $\mathcal{E}$ pour lesquels $\vec{V}_M = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$, avec $\vec{\Omega} = \dfrac{R_1\vec{\Omega}_1 + R_2\vec{\Omega}_2}{R_1 + R_2}$, et $\vec{\omega} = \dfrac{R_2\vec{\Omega}_2 - R_1\vec{\Omega}_1}{R_2 - R_1} + f(t)\,\overrightarrow{OM}$, où $f : t \longmapsto f(t)$ est une application de classe C^k ($k \geqslant 1$) de I dans $\mathbb{R}$.

On suppose de plus qu'à l'instant $t = 0$, M occupe la position M_0 définie par $\overrightarrow{OM}_0 = \dfrac{R_1 + R_2}{2}\vec{i}$.

1°) On considère le cas particulier défini par $p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = 0$, r_1 et r_2 étant deux constantes non nulles simultanément. On pose alors $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$.

a) Quelles conditions doivent remplir r_1 , r_2 et l'application f pour que la sphère S soit animée d'un mouvement de translation ?

b) Dans l'hypothèse où le mouvement de S n'est pas réduit à un mouvement de translation, déterminer les composantes dans b des vecteurs $\vec{\Omega}$, $\overrightarrow{OM}$, $\vec{V}_M$ et $\vec{\omega}$, ainsi que le vecteur vitesse de translation $\vec{V}_T$,et l'axe central $\Delta(t)$ du torseur des vitesses à l'instant t.

c) Dans la même hypothèse où le mouvement de S n'est pas réduit à un mouvement de translation, et où, de plus, f est l'application nulle de I dans $\mathbb{R}$, déterminer l'axoïde du mouvement dans $\mathcal{E}$, c'est à dire l'ensemble $\mathcal{A}$ des positions de $\Delta(t)$ dans $\mathcal{E}$. En déduire, sans calcul, l'axoïde du mouvement dans S, c'est à dire l'ensemble $\mathcal{A}_S$ des positions de $\Delta(t)$ dans l'espace lié à S. Que deviennent $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_S$ lorsque $r_1 = r_2$?

Avec les données numériques : $R_1 = 1$ cm, $R_2 = 3$cm, $r_1 = 5$ rad s^{-1} , $r_2 = 1$ rad s^{-1}, tracer avec précision les courbes d'intersection du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec , à l'instant t, les surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma$, S, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_S$.

2°) On considère le cas particulier défini par $p_1 = q_1 = r_1 = 0$,

$$p_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} A \sin\alpha \sin t \quad , \quad q_2 = \frac{-(R_1 + R_2)}{R_2} A \sin\alpha \cos t \quad , \quad r_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2}(A\cos\alpha + 1),$$

où A désigne une constante positive et α une constante réelle.

a) Calculer les composantes de $\vec{\Omega}$ dans la base b.

b) On définit dans E une nouvelle base $B(t) = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ orthonormée, directe, au moyen des vecteurs : $\vec{I} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$ et $\vec{K} = \sin\alpha \sin t\,\vec{i} - \sin\alpha\cos t\,\vec{j} + \cos\alpha\,\vec{k}$. Calculer $\vec{J}$. Calculer les composantes de $\vec{\Omega} - \vec{k}$ dans B(t) et montrer que le mouvement de Σ peut être obtenu par la composition de deux mouvements de rotation uniformes autour d'axes passant par O. En déduire, sans calcul, les composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans B(t), et calculer les composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans b. (On trouvera : $\overrightarrow{OM} = \dfrac{R_1 + R_2}{2}[\cos(A\,t)\,\vec{I} + \sin(A\,t)\,\vec{J}]$).

c) Avec les données numériques : $R_1 = 1$ cm, $R_2 = 3$ cm, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ et $A = 2$ rad s^{-1}, déterminer les équations paramétriques, en fonction du temps t, de la trajectoire C de M. Préciser les éléments de symétrie de la courbe C.

Etudier les projections orthogonales de C sur les trois plans du repère τ . Pour chacune des projections , préciser les éléments de symétrie, et déterminer avec soin les tableaux de variation, et le tracé des courbes. -FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail